Université François Rabelais
Département de Physique

Année 2009/2010
L2 SM

Mécanique
TD 1

1. Soit $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ une base orthonormée directe.

   - Rappeler brièvement ce que signifie base orthonormée directe.
   - On considère deux vecteurs:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k} \\ \vec{b} &= -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} \end{aligned} \tag{0.1}$$

   – Calculer:
   - leur longueur $|\vec{a}|$ et $|\vec{b}|$
   - leur somme $\vec{a} + \vec{b}$ et la différence $\vec{a} - \vec{b}$.

   – Rappeler:
   - la définition du produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$; quelle relation y a-t-il entre $\vec{a} \cdot \vec{b}$ et $\vec{b} \cdot \vec{a}$? Calculer l'angle $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$
   - la définition du produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$; quelle relation y a-t-il entre $\vec{a} \wedge \vec{b}$ et $\vec{b} \wedge \vec{a}$? Calculer $\vec{i} \wedge \vec{j}$, $\vec{i} \wedge \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k}$, $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

   – Calculer: $2\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{a} \wedge \vec{b}$.

   – Cela a-t-il un sens d'écrire $2\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{a} \cdot \vec{b}$? Si oui, faire le calcul.

2. Deux vecteurs de longueurs a et b font un angle θ entre eux. Montrer que la longueur c de leur somme est:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta} \tag{0.2}$$

3. Démontrer les relations suivantes:

$$\begin{aligned} (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} &= \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) \\ (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} &= \vec{B}\,(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}\,(\vec{B} \cdot \vec{C}) \\ \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \vec{B}\,(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}\,(\vec{A} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

   en exprimant les vecteurs dans une base orthonormée.

4. Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que:

$$|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}-\vec{v}| \tag{0.3}$$

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

5.
   - Démontrer que si un vecteur $\vec{A}(t)$ a un module constant, son vecteur dérivé par rapport au temps $\frac{d\vec{A}}{dt}$ lui est orthogonal.
   - Démontrer que si un vecteur $\vec{A}(t)$ satisfait la relation $\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$, il a un module constant.

6.
   - Démontrer que si un vecteur $\vec{A}(t)$ satisfait la relation $\vec{A} \wedge \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \vec{0}$, alors le vecteur $\vec{A} \wedge \frac{d\vec{A}}{dt}$ est constant.
   - Démontrer que si le vecteur $\vec{A} \wedge \frac{d\vec{A}}{dt}$ est constant, alors le vecteur $\vec{A} \wedge \frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$ est nul.

7. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde par rapport à t du vecteur:

$$\vec{R}(t) = 2at^2\vec{i} - b\sin(\omega t)\vec{j} + 4\left(a^2 - b^2\right)t^3\vec{k} \tag{0.4}$$

où a, b, ω sont des paramètres constants.

8. On choisit un repère cartésien $\left(O; \{\vec{i}, \vec{j}\}\right)$ dans le plan.
   - Rappeler la définition des coordonnées polaires ainsi que celles des vecteurs unitaires $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$ associés.
   - Exprimer $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$ en fonction de $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ et réciproquement.
   - De quelles coordonnées dépendent les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$?
   - Calculer les vecteurs $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}$, $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$.
   - La trajectoire d'un point M dans le plan est donné par: $\vec{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = r(t)\vec{u}_r$. Calculer dans le référentiel lié au repère $\left(O; \{\vec{i}, \vec{j}\}\right)$ la dérivée par rapport au temps de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{OM}$.